Ασκήσεις Δ.Ε ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1) Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $z=\tan y$
ΝΔΟ η λύση του Π.Α.Τ:

$$\frac{1}{\cos^2 y}\cdot\frac{dy}{dx}+x\cdot\tan y+x\cdot\tan^3 y=0 \quad , \quad y(0)=\frac{\pi}{4}$$

έχει την ιδιότητα $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$

ΛΥΣΗ

Θέτω $z=\tan y$ όπου το $\frac{1}{\cos^2 y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\tan y)=\frac{dz}{dx}$

Άρα, στη Δ.Ε έχουμε:

$$\frac{dz}{dx}+x\cdot z+x\cdot z^3=0 \Rightarrow z'+x\cdot z+x\cdot z^3=0 \Rightarrow z'+x\cdot z=-x\cdot z^3 \quad (1)$$

Πρόκειται για Δ.Ε. Bernoulli με $r=3>0$

$$\frac{z'}{z^3}+x\cdot\frac{z}{z^3}=-x\cdot\frac{z^3}{z^3} \Rightarrow z'\cdot z^{-3}+x\cdot z^{-2}=-x \quad (2)$$

Εφόσον διαιρέσαμε με z^3 προφανώς $z\neq 0$ για τη νέα εξίσωση. Άρα, το $z=0$ δεν αποτελεί πλέον λύση της εξίσωσης. Αυτό, δεν είναι πρόβλημα διότι για $z=0$ η εξίσωση (1) ικανοποιείται ~~αλλά~~ δεν πληρείται η αρχική συνθήκη $y(0)=\frac{\pi}{4}$ (Δηλ. $z=\tan y \xRightarrow{z=0} \tan y=0 \underset{x=0}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow \tan y(0)=0 \Rightarrow \tan\frac{\pi}{4}=0 \Rightarrow 1=0$ Αδύνατο)

Θέτω $w=z^{1-3}=z^{-2} \Rightarrow w'=-2z^{-3}\cdot z' \Rightarrow -\frac{w'}{2}=z^{-3}\cdot z'$

Άρα, η (2) είναι:

$$-\frac{w'}{2}+x\cdot w=-x \Rightarrow w'-2xw=2x \Leftarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Γ.Δ.Ε α' τάξης}\\ \text{Μη ομογενής}\end{array}\right\}$$

$$e^{-\int 2x\,dx}\cdot w'-2x\cdot e^{-\int 2x\,dx}\cdot w=2x\cdot e^{-\int 2x\,dx} \Leftrightarrow$$

$$(w\cdot e^{-x^2})'=2x\cdot e^{-x^2} \Leftrightarrow$$

$$w=e^{x^2}\cdot\left(c+\int 2x\cdot e^{-x^2}dx\right)=e^{x^2}\cdot c-1.$$

$$z^2 = \frac{1}{w} = \frac{1}{c \cdot e^{x^2} - 1} \Rightarrow z = \pm\sqrt{\frac{1}{c \cdot e^{x^2} - 1}}$$

$$z = \tan y \Rightarrow \pm\sqrt{\frac{1}{c \cdot e^{x^2} - 1}} = \tan y \Rightarrow y(x) = \pm \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1}{c \cdot e^{x^2} - 1}}\right)$$

Αλλά, $y(0) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1}{c-1}}\right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{c-1}} = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{c-1}} = 1 \Rightarrow \boxed{c = 2}$.

Και επομένως, η λύση του Π.Α.Τ. είναι:

$$y(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot e^{x^2} - 1}}\right)$$

Τώρα,

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \lim_{x \to \infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2e^{x^2} - 1}}\right) = \operatorname{Arctan} 0 = 0$$

2) Να επιλυθεί η Δ.Ε

$$(y-x) \cdot e^{x/y} \frac{dy}{dx} + y \cdot (1 + e^{x/y}) = 0$$

[Ισχύει $\int \frac{z-1}{z \cdot e^{-1/z} + z^2} dz = \log|1 + z \cdot e^{1/z}| +$ σταθ.]

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$(y-x) \cdot e^{x/y} \cdot y' + y(1 + e^{x/y}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y' = -\frac{y(1 + e^{x/y})}{(y-x)\, e^{x/y}} \qquad \left(\begin{array}{l} f \text{ ομογενής εάν} \\ f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y) \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y' = -\frac{\lambda y(1 + e^{\lambda x/\lambda y})}{(\lambda y - \lambda x)\, e^{\lambda x/\lambda y}} = -\frac{y(1 + e^{x/y})}{(y-x) \cdot e^{x/y}} \quad \text{ομογενής} \quad (1)$$

Άρα, θέτουμε $y = x \cdot z \Rightarrow y' = z + x \cdot z'$

Επομένως, στην σχέση (1) έχουμε:

$$z + x z' = -\frac{x \cdot z(1 + e^{x/xz})}{(xz - x) \cdot e^{x/xz}} \Rightarrow x \cdot z' = -\frac{z(1 + e^{1/z})}{(z-1)\, e^{1/z}} - z \Rightarrow$$

$$x z' = -\left[\frac{z + z\cdot e^{1/z} + z^2\cdot e^{1/z} - z\cdot e^{1/z}}{(z-1)\, e^{1/z}} \right] = - \frac{z+z^2\cdot e^{1/z}}{(z-1)\, e^{1/z}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \frac{dz}{dx} = - \frac{z+z^2\cdot e^{1/z}}{(z-1)\cdot e^{1/z}} \Rightarrow \frac{1}{x} dx = \frac{(1-z)\, e^{1/z}}{z+z^2\cdot e^{1/z}} \cdot dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{(1-z)\cdot e^{1/z}}{z+z^2 e^{1/z}}\, dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log|x| = \int \frac{(1-z)}{z\cdot e^{-1/z} + z^2}\, dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log|x| = -\log\left|1+z\cdot e^{1/z}\right| + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\left|x\cdot(1+z\cdot e^{1/z})\right| = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\,(1+z\cdot e^{1/z}) = \pm e^{c} = b, \quad b \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+z\cdot e^{1/z} = \frac{b}{x} \Rightarrow z\cdot e^{1/z} = \frac{b}{x} - 1, \quad b\neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}\cdot e^{x/y} = \frac{b}{x} - 1 \Rightarrow y\cdot e^{x/y} = b - x, \quad b \neq 0.$$

3) Να επιλυθεί η Δ.Ε

$(2x^2+x^3 y+y)dx + (x+4xy^4+8y^3)dy = 0$, $x>0, y>0$

αφού πρώτα βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας αυτής της μορφής: $p(x,y)=\Phi(x\cdot y)$ (οπου Φ μια συνάρτηση που θα πρέπει να προσδιοριστεί)

ΛΥΣΗ

Έστω $M(x,y)=2x^2+x^3\cdot y+y$ και $N(x,y)=x+4x\cdot y^4+8y^3$

$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = x^3+1 \neq 1+4y^4 = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$. όχι πλήρης

Πολ/ζουμε την εξίσωση (και τα 2 μέλη της) με τον πολ/κο παράγοντα $\rho(x,y)=\varphi(x\cdot y)$ ώστε να την μετατρέψουμε σε πλήρη Δ.Ε.

Έτσι, έχουμε:

$$\varphi(x\cdot y)(2x^2+x^3 y+y)\,dx+\varphi(x\cdot y)(x+4xy^4+8y^3)\,dy=0$$

Αλλά, η $\rho(x,y)=\varphi(x\cdot y)$ είναι ολοκληρωτικός παράγοντας ανν

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(x\cdot y)(2x^2+x^3 y+y)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(x\cdot y)\cdot(x+4xy^4+8y^3)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\cdot\varphi'(xy)(2x^2+x^3y+y)+(x^3+1)\varphi(xy)=y\varphi'(xy)(x+4xy^4+8y^3)+(1+4y^4)\varphi(xy)$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(xy)(2x^3+x^4y+\cancel{xy}-\cancel{xy}-4xy^5-8y^4)=\varphi(x\cdot y)(\cancel{1}+4y^4-x^3-\cancel{1})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(xy)(2x^3+x^4y-4xy^5-8y^4)=\varphi(x\cdot y)(4y^4-x^3)\Leftrightarrow \quad x>0,\ y>0$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(xy)(-2\cancel{(4y^4-x^3)}-xy\cancel{(4y^4-x^3)})=\varphi(x\cdot y)\cancel{(4y^4-x^3)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(xy)(-2-xy)=\varphi(xy)\Leftrightarrow \varphi'(x\cdot y)=\frac{1}{-2-xy}\varphi(xy)\overset{xy=w}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(w)=-\frac{1}{2+w}\varphi(w)\Leftrightarrow \varphi'(w)+\frac{1}{2+w}\varphi(w)=0 \quad (\text{ομογ. ΓΔΕ α' τάξ.})$$

$$\Leftrightarrow \varphi(w)=e^{-\int\frac{1}{2+w}dw}\cdot C\Leftrightarrow \varphi(w)=C\cdot e^{\log\left|\frac{1}{2+w}\right|}=\frac{C}{|2+w|}$$

Εφόσον, $x>0\ \&\ y>0\Rightarrow x\cdot y>0\Rightarrow w>0\Rightarrow 2+w>2>0$

άρα $\varphi(w)=\dfrac{C}{2+w}$, $w>0 \overset{C=1}{\Rightarrow} \varphi(xy)=\dfrac{1}{2+xy}$.

(Διότι ζητάμε έναν ολοκλ. παράγ.)

Συνεπώς, $\rho(x,y)=\varphi(xy)=\dfrac{1}{2+xy}$ ← ολοκληρ. παράγων

Έτσι, θα έχουμε:

$$\underbrace{\frac{1}{2+xy}(2x^2+x^3y+y)}_{M_0(x,y)}dx+\underbrace{\frac{1}{2+xy}(x+4xy^4+8y^3)}_{N_0(x,y)}dx=0 \quad \text{πλήρης Δ.Ε}$$

Άρα, θα ∃ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$$d f(x,y)=\underbrace{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}_{M_0(x,y)}dx+\underbrace{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}_{N_0(x,y)}dy=0\Rightarrow \boxed{f(x,y)=C_1} \quad (1)$$

$$M_0(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\Rightarrow f(x,y)=\int M_0(x,y)\,dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x,y)=\int\frac{1}{2+xy}(2x^2+x^3y+y)\,dx+g(y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \int \frac{2x^2+x^3y}{2+xy}\,dx + \int \frac{y}{2+xy}\,dx + g(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \int \frac{x^2(\cancel{2+xy})}{\cancel{2+xy}}\,dx + \int \frac{\frac{d}{dx}(2+xy)}{2+xy}\,dx + g(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \int x^2\,dx + \log|2+xy| + g(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \log|2+xy| + g(y) \xRightarrow{xy>0 \Rightarrow 2+xy>0}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \log(2+xy) + g(y)$$

Ενώ,

$$N_0(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Rightarrow \frac{1}{2+xy}(x+4y^4x+8y^3) = \frac{x}{2+xy} + g'(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(y) = \frac{4xy^4+8y^3}{2+xy} = \frac{4y^3(\cancel{xy+2})}{\cancel{xy+2}} = 4y^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{g(y) = y^4 + C_2}$$

Άρα, $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \log(2+xy) + y^4 + C_2 \overset{①}{=} C_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3} + \log(2+xy) + y^4 = C_1 - C_2$$

Άρα, το σύνολο των λύσεων δίνεται από τη σχέση.

$$\frac{x^3}{3} + \log(2+xy) + y^4 = C, \quad C = C_1 - C_2 : \text{σταθ.}$$

4) Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού μορφής: $X = x - a$ και $Y = y - \beta$ (με a & β οι κατάλληλοι αριθμοί που θα πρέπει να προσδιοριστούν) να επιλυθεί η Δ.Ε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+2} - e^{\frac{x+y+1}{x+2}}$$

ΛΥΣΗ

$$(E): \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+2} - e^{\frac{x+y+1}{x+2}}$$

Θέτω $X = x - a \Rightarrow x = X + a$

$Y = y - \beta \Rightarrow y = Y + \beta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dY} \cdot \frac{dY}{dX} \cdot \frac{dX}{dx} = 1 \cdot \frac{dY}{dX} \cdot 1 = \frac{dY}{dX}$$

Στην (E) είναι:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y+(a+\beta+1)}{X+(a+2)} - e^{\frac{X+Y+(a+\beta+1)}{X+(a+2)}} \quad (1)$$

Επιλύω το σύστημα:

$$\begin{cases} a+\beta+1=0 \\ a+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \beta = 1 \\ a=-2 \end{matrix}$$

Άρα, η (1) γίνεται:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X} - e^{\frac{X+Y}{X}} \quad \text{καθώς} \quad \begin{cases} x = X-2 \\ y = Y+1 \end{cases}$$

(Σκοπός μας ήταν να τη φέρουμε σε ομογενή μορφή)

$$(2) \; Y' = \frac{X+Y}{X} - e^{\frac{X+Y}{X}} \qquad \left(Y' = \frac{\lambda X + \lambda Y}{\lambda X} - e^{\frac{\lambda X+\lambda Y}{\lambda X}} \text{ ομογενής} \right)$$

Θέτω $Y = w \cdot X \Rightarrow Y' = w' \cdot X + w$

Άρα, η (2) είναι:

$$w' \cdot X + \cancel{w} = 1 + \cancel{w} - e^{(1+w)} \Rightarrow w' \cdot X = 1 - e^{(1+w)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dX} X = 1 - e^{(1+w)} \Rightarrow \frac{1}{X} dX = \frac{1}{1-e^{(1+w)}} dw \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{X} dX = \int \frac{1}{1-e^{(1+w)}} dw \quad (3)$$

Θέτω $k = 1+w \Rightarrow dw = dk$ άρα η (3) γίνεται:

$$\int \frac{1}{X} dX = \int \frac{1}{1-e^k} dk = \int \frac{e^{-k}}{e^{-k}(1-e^k)} dk = \int \frac{e^{-k}}{e^{-k}-1} dk =$$

$$= -\log|e^{-k}-1| = -\log|e^{-(1+w)}-1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log|x| + c = -\log\left|e^{-(1+w)} - 1\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\left|x\left(e^{-(1+w)} - 1\right)\right| = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(e^{-(1+w)} - 1\right) = \pm e^{c}, \quad c \neq 0$$

$$\Rightarrow x\left(e^{-\left(1+\frac{y}{x}\right)} - 1\right) = b, \quad b = \pm e^{c}$$

$$\Rightarrow (x+2)\left(\frac{1}{e^{\left(1+\frac{y-1}{x+2}\right)}} - 1\right) = b \leftarrow \text{ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞ. (Ε).}$$

5) Ας είναι b και c θετικές σταθερές.
ΝΔΟ κάθε λύση y της εξίσωσης
$y' = y(b - cy)$ με $y(0) > 0$ παραμένει
θετική για $x > 0$ και τείνει προς τη
σταθερή λύση b/c για $x \to \infty$

ΛΥΣΗ

Έστω $(E): y' = y(b - c\cdot y)$ όπου b, c σταθερές
και $0 < y(0) < \frac{b}{c}$.

$$y' = y(b - cy) \Rightarrow y' = by - cy^2 \Rightarrow y' - by = -cy^2 \Rightarrow$$

Bernoulli με $r = 2$ $\Rightarrow y' \cdot y^{-2} - by \cdot y^{-2} = -c$. (1)

Θέτω $z = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2} \cdot y'$

Άρα, η (1) θα γίνει:

$$-z' - b\cdot z = -c \Rightarrow z' + bz = c \leftarrow \text{(Μη ομογενής Γ.Δ.Ε α' τάξης)}$$

$$z(x) = e^{-\int_0^x b\,dx}\left(z(0) + \int_0^x c\cdot e^{\int_0^s b\,dt}\,ds\right) =$$

$$= e^{-bx}\left(\frac{1}{y(0)} + c\int_0^x e^{bs}\,ds\right) =$$

$$= e^{-bx}\left(\frac{1}{y(0)} + \frac{c}{b}\cdot\left(e^{bx} - 1\right)\right) =$$

$$= \frac{e^{-bx}}{y(0)} + \frac{c\cdot e^{-bx}}{b}\cdot\left(e^{bx} - 1\right) = \frac{e^{-bx}}{y(0)} + \frac{c}{b}\left(1 - e^{-bx}\right)$$

Άρα, $y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\frac{1}{y(0)} \cdot e^{-bx} + \frac{c}{b}(1-e^{-bx})} = \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{1}{y(0)} - \frac{c}{b}\right)}_{\text{νδο θετικό}} \underbrace{e^{-bx}}_{>0} + \underbrace{\frac{c}{b}}_{>0}}, \; x>0$

$\frac{1}{y(0)} - \frac{c}{b} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y(0)} > \frac{c}{b} \Rightarrow y(0) < \frac{b}{c}$ ισχύει

Άρα $y(x) > 0, \; \forall x \geq 0$

$\lim_{x \to \infty} y(x) = \frac{1}{c/b} = \frac{b}{c}$.

6) Έστω η πρώτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση

$(E): \; y' = ay + b$,

όπου a και b είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0, +\infty)$. ΝΔΟ

- Αν $a(x) \leq m, \; \forall x \geq 0$ και $m<0$ (m: σταθ.), και η συνάρτηση $b(x)$ φραγμένη στο $[0,+\infty)$, τότε κάθε λύση της (E) είναι φραγμένη στο $[0,+\infty)$

ΛΥΣΗ

$y' = ay + b \Rightarrow y' - ay = b$ με $a, b \in C([0,+\infty))$.

$$y = e^{\int_0^x a(t)dt}\left(y(0) + \int_0^x b(s) \cdot e^{\int_0^s a(t)dt} ds\right) =$$

$$= y(0) \cdot e^{\int_0^x a(t)dt} + e^{\int_0^x a(t)dt} \int_0^x b(s) \cdot e^{\int_0^s a(t)dt} ds$$

$$|y(x)| = \left| y(0) \cdot e^{\int_0^x a(t)dt} + e^{\int_0^x a(t)dt} \int_0^x b(s) e^{\int_0^s a(t)dt} ds \right| \leq$$

$$\leq \left| y(0) \cdot e^{\int_0^x a(t)dt} \right| + \left| e^{\int_0^x a(t)dt} \int_0^x b(s) \cdot e^{\int_0^s a(t)dt} ds \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{|y(0)| \cdot e^{\int_0^x a(t)dt}}_{A(x)} + \underbrace{e^{\int_0^x a(t)dt} \int_0^x |b(s)| \cdot e^{-\int_0^s a(t)dt} ds}_{B(x)} \quad (**)$$

Αρκεί νδο $A(x)$ και $B(x)$ φραγμένες στο $[0,+\infty)$

$1^{ον}$) $a(x) \leq m, \; \forall x \geq 0, \; m \geq 0$

$$\int_0^x a(t)dt \leq \int_0^x m \, dt = mt \Big|_0^x = mx \Rightarrow e^{\int_0^x a(t)dt} \leq e^{mx}$$

Δηλαδή, $A(x) = |y(0)| \cdot e^{\int_0^x a(t)dt} \leq |y(0)| \cdot e^{mx} \xrightarrow{x \to \infty} 0$

$2^{ον})$ $B(x) = e^{\int_0^x a(t)dt} \cdot \int_0^x |b(s)| \cdot e^{-\int_0^s a(t)dt} ds =$

$= \int_0^x |b(s)| \cdot e^{\int_0^x a(t)dt} \cdot e^{\int_s^0 a(t)dt} ds =$

$= \int_0^x |b(s)| \cdot e^{\int_s^x a(t)dt} ds. \quad (*)$

$|b(x)| \leq M$, $\forall x \geq 0$ και $M > 0$

$a(x) \leq m$, $\forall x \geq 0$ και $m < 0$

$\int_s^x a(t)dt \leq \int_s^x m\, dt = mt\Big]_s^x = m(x-s) \Leftrightarrow$

$e^{\int_s^x a(t)dt} \leq e^{mx} \cdot e^{-m \cdot s}$

Έτσι, (*) είναι:

$B(x) = \int_0^x |b(x)| \cdot e^{\int_s^x a(t)dt} ds \leq \int_0^x M \cdot e^{mx} \cdot e^{-ms} ds =$

$= M \cdot e^{mx} \int_0^x e^{-ms} ds = -\frac{M}{m} \cdot e^{mx} (e^{-mx} - 1) =$

$= -\frac{M}{m}(1 - e^{mx}) = -\frac{M}{m}$.

Άρα, η B φραγμένη στο $[0, +\infty)$

Συνεπώς, η (**) είναι:

$|y(x)| \leq 0 - \frac{M}{m} = \frac{M}{m}$ φραγμένη στο $[0, +\infty)$